

6 指數、對數…人體六根的影武者



數學經文

人人都有的六根，眼、耳、鼻、舌、身、意，透過人體的六根，我們得以和外界溝通、接觸，產生感受、經驗…等。

造物者必須創造出，在任何惡劣環境之下，仍然靈敏可用、不會嚴重受損的六根。然而，指數與對數卻是讓人體六根進化完美的影武者，也是不二人選。

唯有對指、對數深刻的瞭解及抱以崇高的敬意，才能掌握人體六根的最後一塊拼圖，達到六根清淨的境界，也才能充分享受六根帶給人類的便利與幸福。

題目：芮氏地震規模與釋放能量的關係

地震規模的觀念是由芮氏在 1935 年所提出的，稱為芮氏地震規模，用符號 s 表示。地震能量是地震所釋放的能量，用符號 w 代表。芮氏地震規模越大，所釋放的地震能量也越大。貝氏根據經驗法則，於 1966 年提出芮氏地震規模 s 與地震能量 w 的參考關係式為

$$\log_{10} w = 5.24 + 1.44s.$$

如果芮氏地震規模增加 1，那麼釋放的能量增加約為原能量的幾倍（取整數部分）？

【對數參考值： $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$ 】

人類的五種感覺…視、聽、嗅、味、觸覺都和對數扯上關係。德國生理學家韋伯在 1825 年作出一個數學定律，用來度量人對各種身體刺激的反應。後來，德國的科學家費克納就發現這種關係，他宣布了一條定律（稱為韋伯-費克納定律）說：「人類對任何刺激的反應，與這些刺激的對數成比例。」韋伯-費克納定律可以用數學式子表示為

$$s = a \log_{10} w + b,$$

其中 s 代表人體器官對刺激的感受強度， w 代表刺激量的大小，而常數 a, b 跟環境與刺激物的種類有關。

6.1 幾何圖形的欣賞…眼睛

早在兩千年前，古希臘的天文學家、數學家托勒密以他的眼睛感受到的發光強弱程度將天上的星星分成 1, 2, 3, 4, 5, 6 等（現在稱為「目視星等」）。直到十九世紀發明了光學儀器，才確認出托勒密所認定的 1 等星的發光光度事實上是 2 等星發光光度的 2.512 倍（同樣的 2 等星的發光光度事實上是 3 等星發光光度的 2.512 倍，……，依此類推）。有了光學儀器之後，就能測出更多的星等，下表是幾顆常見星球的目視星等表：

星球	目視星等
太陽	-26.7
天狼星	-1.45
織女星	0
牛郎星	0.8
北極星	2.0

顯然發光光度較強大的星星的目視星等是負值。如果將光學儀器調整成 0 等星的發光強度定是 1，那麼依「視覺」的韋伯-費克納方程式，可以將目視星等 s 與儀器測量到的發光強度 w 的關係式寫成

$$s = -\log_{2.512} w = -\frac{\log_{10} w}{\log_{10} 2.512} \doteq -\frac{\log_{10} w}{0.4} = -2.5 \log_{10} w,$$

其中 $\log_{10} 2.512$ 的近似值 0.4 可查閱第 6.7 節的常用對數表。

例題 1 星空中，有一群會改變亮度的星，叫做變星。天文學家發現一顆變星，最亮時的目視星等 1.6；最暗時的目視星等 4.1。求此變星在最亮時的發光強度是最暗時的幾倍？

【解】令光學儀器測得最亮與最暗時的發光強度分別為 w_1 與 w_2 。由關係式得到

$$1.6 = -2.5 \log_{10} w_1, \quad 4.1 = -2.5 \log_{10} w_2.$$

將兩式相減得到

$$1.6 - 4.1 = -2.5(\log_{10} w_1 - \log_{10} w_2) = -2.5 \log_{10} \frac{w_1}{w_2}.$$

因此

$$\log_{10} \frac{w_1}{w_2} = 1 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = 10.$$

故此變星在最亮時的發光強度是最暗時的 10 倍。

練習 1 天文學家經常透過數學式子

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d}{32.6}$$

來估計恆星與地球的距離，這裡的符號 M 是該恆星的絕對星等， m 是該恆星的目視星等， d （光年）是恆星與地球的距離。

北極星被稱為夜歸人的燈塔，因為它始終在天空的北方。已知北極星的絕對星等 -3.0 ，目視星等 2.0 ，求北極星與地球的距離（以光年表示）。

眼睛不僅將光的強度弱化，也會將所看到的面積變小，所以“睜眼說瞎話”不足為奇。統計學家克利夫蘭就研究過人體眼睛對面積的感應程度：

例題 2 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如大圖形是小圖形的 4 倍，眼睛感覺到的卻只有 $4^{0.7} \div 2.6$ 倍。

書本上並列兩個國家的地圖，它們的縮小比例都一樣。如果從地圖上看起來，大國是小國面積的 128 倍，那麼實際上大國面積是小國面積的幾倍？

【解】 設大國面積是小國面積的 x 倍，由說明知道

$$x^{0.7} = 128 = 2^7 \Rightarrow x = 2^{10} = 1024.$$

故大國面積是小國面積的 1024 倍。

6.2 天籟之音的聆聽…耳朵

聆聽天籟之音是造物者創造耳朵的用意，可惜的是，我們聽到的常常是噪音而不是什麼天籟之音。就讓我們研究一下噪音與耳朵的關係：

例題 3 噪音監測器量度的噪音大小 dB（分貝）是根據當地聲音總能量 w （瓦特）透過數學式子

$$\text{dB} = 120 + 10\log_{10} w$$

來計算。

台北市政府規定球場內噪音不得超過 65 分貝，而氣笛製造商製造一款低噪音氣笛，一支氣笛只會產生 45 分貝噪音。欲符合市政府噪音規定，球場內至多能同時響起幾支氣笛呢？

【解】 令至多能同時響起 x 支氣笛，且一支氣笛會產生 w 瓦特。由於一支氣笛會產生 45 分貝噪音，得到下列等式

$$45 = 120 + 10\log_{10} w \Rightarrow w = 10^{-7.5}.$$

因此 x 支氣笛產生能量 $x \times 10^{-7.5}$ 瓦特。因為球場內噪音不能超過 65 分貝，所以得到下列不等式

$$\begin{aligned} 120 + 10\log_{10}(x \times 10^{-7.5}) &\leq 65 \Rightarrow \log_{10}(x \times 10^{-7.5}) \leq -5.5, \\ &\Rightarrow \log_{10} x - 7.5 \leq -5.5, \\ &\Rightarrow \log_{10} x \leq 2, \\ &\Rightarrow x \leq 100. \end{aligned}$$

故球場內至多能同時響起 100 支氣笛。

耳朵除了聆聽天籟之音外，聽八卦消息是它的另一最愛。人們不僅喜歡用耳朵聽八卦消息，更喜歡用嘴巴傳播聽來的八卦新聞。這傳播速度有多快呢？讓我們研究一下吧！

八卦新聞的擴散模型：有一八卦新聞在一個城市裡散播著，剛開始時，每 $1+a$ 人，就有一人知道此新聞。經過 t 天渲染後，知道這八卦新聞的比例 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{經過 } t \text{ 天渲染後，知道這八卦新聞的人數}}{\text{城市總人數}}.$$

若此城市每人每天平均接觸的人數為 b 人，則 $I(t)$ 可以用數學式子表示為

$$I(t) = \frac{1}{1 + a \cdot 7^{\frac{b}{20}t}}.$$

根據經驗得知，當 $I(t) = \frac{1}{2}$ 的時間 t 是該八卦新聞傳播最嚴重的時刻。

例題 4 有一人口 1000 人的山地鄉，根據調查，該鄉每人每天平均僅接觸 8 人。在一次選舉裡，某候選人想藉著散播謠言來中傷另一候選人。

此候選人想在選前幾天，利用他的 20 人競選團隊出去造謠，並希望在投票當天達到傳播最嚴重的時刻，好讓另一候選人落選。

你知道此候選人應該在投票日前幾天散播此謠言嗎？

【解】剛開始有 20 人在散播謠言，由 $\frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$ 知道：每 $50 = 1 + 49$ 人，就有一人知道此謠言。因此 $a = 49, b = 8$ ，即

$$I(t) = \frac{1}{1 + 49 \cdot 7^{\frac{8}{20}t}}.$$

由 $I(t) = \frac{1}{2}$ 解得

$$7^{\frac{8}{20}t} = 7^2 \Rightarrow t = 5.$$

故在投票日前 5 天散播此謠言最好。

6.3 美食美味的感測器…舌頭

老張牛肉麵的招牌是它的小辣椒，味道好吃又夠辣。舌頭對這款小辣椒的韋伯-費克納定律是：當一碗牛肉麵放 w 個小辣椒時，舌頭感覺到的辣度 s 會滿足

$$s = \log_{10} w.$$

正常一碗牛肉麵放 5 個小辣椒。如果你是一個超愛嘗辣的人，要求老闆將牛肉麵的辣度

提高 3 倍，那麼應該放幾個小辣椒呢？讓我們來算算吧！

設放 5 個小辣椒的辣度為 s ，所以

$$s = \log_{10} 5 \Rightarrow 3s = 3\log_{10} 5 = \log_{10} 5^3 = \log_{10} 125.$$

除非老闆腦筋秀逗，否則老闆不會在一碗牛肉麵放 125 個小辣椒（可能也放不下），可以解決的方法是：去種植更辣的超辣小辣椒。這就像果農不斷地接枝改良水果的甜度，來滿足大眾舌頭對甜度的要求。

同樣的情況也發生在老師的上課裡，女老師用盡力氣地認真上課，坐在後頭的同學要求老師提高音量 3 倍。如果你懂韋伯-費克納定律的話，你就不會做這種「不合乎數學原理」的要求。因為音量提高 3 倍，老師所費的能量可能是剛剛的百餘倍，老師大概上個三分鐘就能量耗盡，身體虛脫了。但是，該如何解決呢？這就要感謝麥克風的功能了，老師只要對著麥克風講話，透過電流驅動擴大機將音量提高，就搞定了。家裡如果有音響的話，你可以摸摸看擴大機熱不熱，一定很熱，就是這個能量將音響的聲音擴大的。

6.4 天搖地動的感受…身體

如果將芮氏地震規模 s 當成身體的感受程度，地震所釋放的能量 w 當刺激量的大小，那麼地震對身體的韋伯-費克納定律為

$$s = \frac{1}{1.44} \log_{10} w - \frac{5.24}{1.44}.$$

現在讓我們來解決本章一開始的題目：

設芮氏地震規模為 s 與 $s+1$ 時，地震所釋放的能量分別為 w_1 與 w_2 。代入公式得到

$$\log_{10} w_1 = 5.24 + 1.44s, \quad \log_{10} w_2 = 5.24 + 1.44(s+1).$$

將兩式相減得到

$$\log_{10} w_2 - \log_{10} w_1 = 1.44 \Rightarrow \log_{10} \frac{w_2}{w_1} = 1.44.$$

由對數參考值知道： $\log_{10} 27 = 1.4313, \log_{10} 28 = 1.4471$ 。所以

$$\frac{w_2}{w_1} = 27. \dots$$

的整數部分為 27。答案為 27 倍。

牛頓冷卻規律描述一個物體在常溫 $a^{\circ}\text{C}$ 環境下的溫度變化。如果物體的初始溫度是 $b^{\circ}\text{C}$ ，那麼經過 t 小時後的溫度 $f(t)^{\circ}\text{C}$ 將滿足

$$f(t) - a = (b - a) \left(\frac{1}{2} \right)^{kt},$$

這裡的常數 k 與物體的性質有關。

例題 5 某冬晨，警局接到報案，在街頭發現一流浪漢的屍體，早上六點半時測量其體溫為 13°C ，到早上七點半時，其體溫已降到 11°C ，若假設室外溫度約維持在 10°C ，且人體正常體溫為 37°C 。問：流浪漢死亡的時間。

【解】設早上六點半時，流浪漢已死亡 t 小時。由題意知道： $f(t) = 13, f(t+1) = 11$ 。代入牛頓冷卻公式得到

$$3 = f(t) - 10 = (37 - 10) \left(\frac{1}{2} \right)^{kt} \Rightarrow 1 = 9 \left(\frac{1}{2} \right)^{kt}$$

及

$$1 = f(t+1) - 10 = (37 - 10) \left(\frac{1}{2} \right)^{k(t+1)} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{3}.$$

將 $\left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{3}$ 代入第一式得到

$$3 = f(t) - 10 = (37 - 10) \left(\frac{1}{2} \right)^{kt} = 27 \left(\frac{1}{3} \right)^t \Rightarrow t = 2.$$

流浪漢死亡的時間是早上四點半。

練習 2 牛奶保鮮時間因儲藏時的溫度不同而不同。若牛奶放在 0°C 的冰箱中，保鮮時

間是 200 小時，而在 24°C 的廚房中是 25 小時。假定保鮮時間 y (小時) 與儲藏溫度 $x(^{\circ}\text{C})$ 的函數關係是 $y = a \cdot b^x$ (a, b 是常數)。

(1) 寫出保鮮時間 y 關於儲藏溫度 x 的關係式。

(2) 利用(1)的結果，指出溫度在 32°C 與 16°C 時的保鮮時間。

6.5 頭腦的學習成效…意識

為了區分棋力的好壞，業餘圍棋採用 30 級數的等級區分，最低 30 級，等於你是一點概念都沒有，或是稍微懂一點點；28 級大概可以和別人下完一整盤棋了。對圍棋有興趣的人來說，不可能只練習或下過幾十盤棋而已，起碼有上百盤或上千盤。如果要用數學式子描述一個人的圍棋級數，將他下過的圍棋盤數取對數可能是不錯的選擇。

這樣的情況也反映在運動員身上，體操選手的分數滿分是 10 分，但是為了達到九點多分，他必須日以繼夜地苦練，除了天賦外，將練習的時數取對數多少也可以反應他的得分。

因此舉一反三用在頭腦的學習成效上是不確實的，想要得到好成績，必須不斷的練習，舉一反三可能比較實際。至少韋伯-費克納方程式是這樣說的。除了取對數外，指數也可以用來描述頭腦的學習成效：

例題 6 心理學家常用數學模式 $L(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 時間的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。

有一學生一天可以背熟 75 個單字，兩天可以背熟 135 個單字。試問：這學生三天可以背熟幾個生字。

【解】 由題意知道

$$\begin{cases} L(1) = 75 = a(1 - 10^{-b}); \\ L(2) = 135 = a(1 - 10^{-2b}) \end{cases} \Rightarrow \frac{75}{135} = \frac{1 - 10^{-b}}{1 - 10^{-2b}}$$

$$\Rightarrow 5(10^{-b})^2 - 9(10^{-b}) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 10^{-b} = \frac{4}{5} \text{ 或 } 1 \text{ (不合) }。$$

將 $10^{-b} = \frac{4}{5}$ 代回原方程組得到

$$75 = a\left(1 - \frac{4}{5}\right) \Rightarrow a = 375.$$

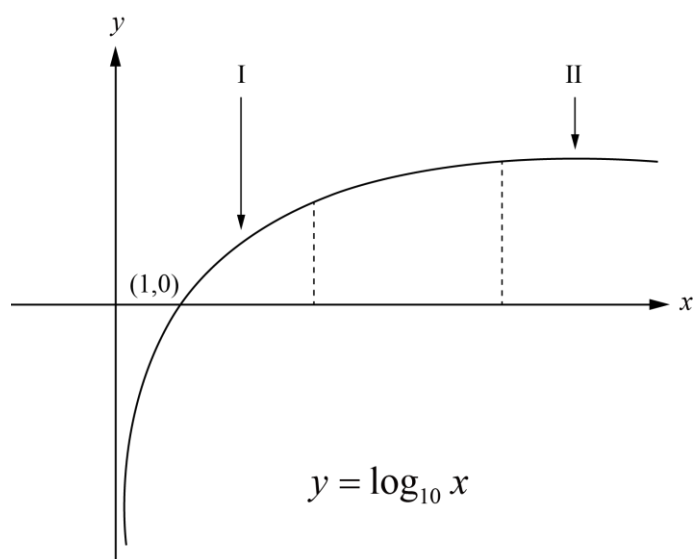
這學生三天能背熟

$$L(3) = a(1 - 10^{-3b}) = 375\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) = 183$$

個生字。

6.6 對數函數圖形的奧秘…人體六根的最後一塊拼圖

下圖是對數函數 $y = \log_{10} x$ 的概略圖形：這裡的 x 代表光線的強度； y 代表眼睛對光的感受強度



對數函數被雀屏中選主宰人體各種器官的奧秘是什麼呢？為何被選中的不是直線、二次

函數、高次多項式函數或像 $y = \sqrt{x}$ 之類的函數圖形呢？讓我們列舉對數函數圖形的一些特性：

- ① 對數函數是遞增函數，也就是說， x 的值越大，其函數值 $\log_{10} x$ 也越大。當 $0 < x < 1$ 時，函數值為負，且越靠近 0 時，下降的速度越快；當 $x > 1$ 時，函數值為正，但上升的速度趨緩。
- ② 當 $x > 1$ 且 x 不是很大的時候，由圖中曲線 I 部分得知：其函數值不會過於貼近 0；當 x 很大的時候，由圖中的曲線 II 部分得知：其函數值增加的速度很平緩。
- ③ 以眼睛為例，晚上時，眼睛接收很微弱的光，但白天時，眼睛必須適應強光的照射。因此，在晚上讓眼睛可以依然看清楚周遭環境，而白天讓眼睛不要受強光的傷害，是造物者創造眼睛的優先法則。而對數函數的圖形剛好符合這個原則，曲線 I 部分代表晚上的情形，光微弱，但眼睛還是有一定的辨識程度（因為曲線 I 部分離 0 有一段距離）；曲線 II 部分代表白天的情形，光線雖強，但眼睛受到一定程度的保護（因為曲線 II 部分以很平緩的速度上升）。
- ④ 無論是直線、二次函數、高次多項式函數或像 $y = \sqrt{x}$ 之類的函數圖形，它們都沒有像對數函數般，既可在晚上有一定的能見度，白天又可以保護眼睛的雙重好處。例如根號函數 $y = \sqrt{x}$ 的圖形在 x 很小時，其圖形跟對數函數的圖形很像，但當 x 很大時，其圖形爬升過快，容易造成眼睛的傷害。
- ⑤ 人體六根的其它器官的作用跟眼睛是相似的，所以對數函數是保護六根的不二人選，也是完美的人選。

「床前明月光，疑是地上霜，…」意味著，在暗夜裡，只要有些許的月光，眼睛就能感受到像霜一樣亮；「月明星稀」訴說著，月圓時的亮光足以蓋過多數星星的餘光；白天裡，光線那樣強，眼睛依然可以適應，不會受損，這都要感謝對數函數的傑作。不僅在黑暗裡，眼睛給人們帶來安全感；甚至在白天時，眼睛也能舒服的運作，不造成器官的

痛苦。

在享受六根帶來的便利與幸福之餘，更應對指、對數抱以崇高的敬意及深刻的瞭解。

6.7 常用對數表…昏睡的传统

在第 6.1 節中，用到近似值 $\log_{10} 2.512 \div 0.4$ ，這個近似值可由常用對數表及其表尾差（如下表）得到

$$\log_{10} 2.512 \div 0.3997 + 0.0003 = 0.4.$$

常用對數表 $y = \log_{10} x$											表 尾 差								
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15

要注意的是，我們的常用對數表及表尾差僅正確到前四位數，所以利用對數表得到的數據僅準確到前四位數。相較於電腦可以準確到十來位數，顯得遜色許多。

在沒有電腦的時代，常用對數表是計算的利器，甚至可以利用內差法求得更精確的近似值（表尾差是內差法的一個特例）。但是，電腦出現之後，再怎麼精確的對數表、表尾差或內差法的使用都無法超越電腦計算得到的近似值。所以常用對數表的教學應將重點放在內差法的數學層面，也就是，對數函數圖形在很近的兩個點間之曲線可以想成直線的概念；而不是看中查表的過程，這些過程都可以由電腦代勞。因此，常用對數表的表尾差可以不用放在附錄上，一則它是內差法得到的結果，另一則是不需要查到這樣精細（勞神，浪費時間），再怎樣精細也不如電腦計算的快速與準確。或許是擺脫不了傳統的束縛，直到今天，教科書所附的常用對數表都還是包含表尾差，也要求學生同時會表尾差與內差法兩種方法。不知道何時，這種昏睡的传统才會甦醒過來。

最後引用一則奧修在《解金剛經》中講的古代印度故事，供各位體悟：

有一個人在做傳統的“斯拉達”儀式來榮耀他剛過世的父親。“斯拉達”是當一個人的

父親過世，為他的旅程祈禱的一種儀式。在儀式進行當中，他家養的狗跑進了祈禱房，因為害怕牠沾汙了那個情況，所以那個人就趕快起來將那隻狗綁在走廊的柱子上。

幾年之後，當他過世，他的兒子為他執行“斯拉達”儀式。他很小心地去遵循每一個細節，所以他就從鄰居抓來一隻狗，因為就他的記憶，他認為那一定非常重要。“我父親在祈禱當中特別爬起來去做它，當他把那隻狗拴在柱子上之後，他覺得很高興，然後就繼續祈禱。”他不想錯過任何事情，那個儀式必須很完美。在這個時候，他家裏沒有養狗，他必須跑到鄰近地區去找一隻迷路的狗，結果他抓到了一隻，然後就很小心地將它拴在走廊的柱子上，問心無愧地完成了整個儀式。

在那戶人家，多少世紀以來，那個儀式仍然被遵循著。事實上，神聖的狗的儀式已經變成了那個典禮最重要的項目。

事情就是這樣在進行，人們生活在無意識之中。你們的父親做了些什麼，他們的父親以及那些父親的父親做了些什麼，它就被視為神聖的，你們就繼續重複去做它，你們不去關心它真正的意義是什麼。

指數、對數…人體六根的影武者的練習題解答

練習 1

由題意知

$$2 - (-3) = 5 \log_{10} \frac{d}{32.6} \Rightarrow d = 326.$$

故北極星與地球的距為 326 光年。

練習 2

解法如下：

(1) 由題目知

$$200 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 200,$$

再由題意得到

$$\begin{aligned} 25 &= 200 \cdot b^{24} \Rightarrow b^{24} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \\ &\Rightarrow b = 2^{-\frac{1}{8}}, \end{aligned}$$

代回得到

$$y = 200 \times 2^{-\frac{1}{8}x}.$$

(2) 將 32° 代入此函數關係得到

$$\begin{aligned} y &= 200 \times 2^{-\frac{1}{8} \cdot 32} = 200 \times 2^{-4} \\ &= 12.5, \end{aligned}$$

再將 16° 代入

$$\begin{aligned} y &= 200 \times 2^{-\frac{1}{8} \cdot 16} = 200 \times 2^{-2} \\ &= 50. \end{aligned}$$